



# Révision des croyances dans une clôture propositionnelle de contraintes linéaires (version étendue)

Jean Lieber

## ► To cite this version:

Jean Lieber. Révision des croyances dans une clôture propositionnelle de contraintes linéaires (version étendue). [Rapport de recherche] LORIA, UMR 7503, Université de Lorraine, CNRS, Vandoeuvre-lès-Nancy; Inria Nancy - Grand Est (Villers-lès-Nancy, France). 2015, pp.17. hal-01155235

**HAL Id: hal-01155235**

**<https://inria.hal.science/hal-01155235>**

Submitted on 26 May 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Révision des croyances dans une clôture propositionnelle de contraintes linéaires (version étendue)

Jean Lieber

LORIA UMR 7503 (Université de Lorraine, CNRS) et Inria Nancy Grand Est  
54506 Vandœuvre-lès-Nancy, France  
Jean.Lieber@loria.fr

26 mai 2015

Ce document est la version longue de l'article publié dans les actes des JIAF (journées d'intelligence artificielle fondamentale) en 2015. La différence est principalement au niveau des preuves : certaines preuves n'existent pas dans l'article et d'autres sont davantage détaillées ici.

## Résumé

Réviser des croyances par d'autres croyances consiste à modifier les premières pour qu'elles soient cohérentes avec les secondes. Certains opérateurs de révision de croyances s'appuient sur des distances entre interprétations (qui servent à « mesurer » les modifications). La révision des croyances a été étudiée dans plusieurs formalismes, notamment en logique propositionnelle et dans le formalisme des conjonctions de contraintes linéaires. Cet article étudie la révision dans la clôture propositionnelle des contraintes linéaires, qui étend les deux formalismes précédents. La difficulté principale tient au fait qu'un opérateur s'appuyant sur une distance classique sur les  $n$ -uplets de réels, telle que la distance de Manhattan, ne vérifiera pas les postulats classiques de la révision. La solution proposée ici consiste à utiliser une distance à ensemble de valeurs discret. Un opérateur de révision est ainsi décrit et étudié, et un algorithme pour cet opérateur est présenté, qui s'appuie sur une mise sous forme normale disjonctive et sur des optimisations linéaires.

## 1 Introduction

Le raisonnement à partir de cas (RÀPC) est un mode de raisonnement s'appuyant sur la réutilisation d'un ensemble de cas, un cas étant la représentation d'un épisode de résolution de problème [1]. Dans beaucoup de travaux, raisonner à partir de cas consiste dans un premier temps à sélectionner un cas dans une base de cas qui soit proche du cas représentant le problème cible (étape de remémoration), puis à modifier ce cas afin de résoudre le problème cible (étape d'adaptation).

Une approche développée ces dernières années a consisté à utiliser un opérateur de révision des croyances pour effectuer l'adaptation [2]. Le RÀPC peut ainsi bénéficier des travaux visant à implanter des opérateurs de révision dans divers formalismes, par exemple dans des logiques de descriptions [3, 4, 5], ou dans la logique propositionnelle  $\mathcal{L}_P$  ou des fragments de  $\mathcal{L}_P$  [6, 7, 8]. Certains de ces travaux ont été motivés par le développement d'un système de RÀPC, TAAABLE, qui résout des problèmes culinaires [9], les opérateurs de révision étant réunis dans la bibliothèque RÉVISOR (<http://revisor.loria.fr>) : RÉVISOR/PL et RÉVISOR/PLAK en  $\mathcal{L}_P$  [8], RÉVISOR/CLC dans le formalisme  $\mathcal{L}_{CCL}$  des conjonctions de contraintes linéaires [10] et dans  $\mathcal{L}_{AQ}$ , une algèbre qualitative [11] (en pratique, les algèbres qualitatives étudiées étaient Allen, INDU et RCC8). Dans TAAABLE, ces opérateurs ont été utilisés de la façon suivante : RÉVISOR/PL et RÉVISOR/PLAK permettent de proposer des substitutions de noms d'ingrédients, RÉVISOR/CLC permet d'adapter les quantités d'ingrédients (par exemple, le remplacement d'un fruit par un fruit moins sucré peut être accompagné par une augmentation de la quantité de sucre en poudre), RÉVISOR/QA permet d'adapter les préparations.

Le système TAAABLE fait donc appel à différents opérateurs de révision dans différents formalismes. Cependant, il n'y a pas interaction entre ces trois inférences, en dehors de leurs exécutions par le système. Pour une interaction qui soit gérée au sein d'un mécanisme d'inférences, il faudrait un formalisme combinant ces formalismes. Une révision dans une première « combinaison » de formalisme a été étudiée : le cadre formel étant celui de la clôture propositionnelle d'une algèbre qualitative [12]. Cet article présente une étude de la révision dans une nouvelle combinaison de formalismes :  $\mathcal{L}_{\text{CPCL}}$ , la clôture propositionnelle de  $\mathcal{L}_{\text{CCL}}$ .

Après les préliminaires (section 2), la logique  $\mathcal{L}_{\text{CPCL}}$  est définie en section 3. Puis, une définition d'un opérateur de révision dans  $\mathcal{L}_{\text{CPCL}}$  est donnée (section 4). Cet opérateur s'appuiera sur une distance entre  $n$ -uplets de réels. On verra que l'utilisation des distances usuelles (telles que la distance de Manhattan ou la distance euclidienne) pose problème, pour la satisfaction des postulats AGM des opérateurs de révision. Une autre famille de distance sera utilisée pour contourner ce problème. Puis, la section 5 présentera un algorithme pour calculer la révision de  $\psi$  par  $\mu$  où  $\psi$  et  $\mu$  sont des ensembles de croyances représentés dans  $\mathcal{L}_{\text{CPCL}}$ .  $\mathcal{L}_{\text{CPCL}}$  s'appuie sur des variables à valeurs réelles. La section 6 étudie comment l'approche présentée s'étend pour les contraintes avec des variables qui peuvent être à valeurs entières ou réelles. La section 7 conclura et mettra en évidence des perspectives de recherches.

## 2 Préliminaires

**Ensembles de nombres.**  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{R}$  sont, respectivement, les ensembles des entiers naturels, des entiers relatifs, des rationnels et des réels. On considérera (par plongements) qu'on a la chaîne des inclusions  $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ .  $\mathbb{Q}_+$  est l'ensemble des rationnels  $x \geq 0$ .  $\mathbb{R}_+$  est l'ensemble des réels  $x \geq 0$ . Si  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ , on note  $\varepsilon\mathbb{N}$  l'ensemble  $\{\varepsilon n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{0, \varepsilon, 2\varepsilon, \dots\}$ .

**Parties entières d'un réel.** Étant donné  $x \in \mathbb{R}$ , on note  $\lfloor x \rfloor$  et  $\lceil x \rceil$  sa partie entière et sa partie entière supérieure :  $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid x \geq n\}$  et  $\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} \mid x \leq n\}$ . On notera les propriétés suivantes (pour  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ) :

$$\lceil \alpha + \beta \rceil \leq \lceil \alpha \rceil + \lceil \beta \rceil \quad (1)$$

$$\lceil \alpha \rceil \leq \beta \quad \text{ssi} \quad \alpha \leq \lfloor \beta \rfloor \quad (2)$$

$$\alpha \leq \lceil \alpha \rceil < \alpha + 1 \quad (3)$$

**Distances et espaces métriques.** Soit  $E$  un ensemble. Une distance sur  $E$  est une fonction  $d$  qui à  $(x, y) \in E^2$  associe un réel positif  $d(x, y)$  et est tel que, pour tout  $x, y, z \in E$ , (i)  $d(x, y) = 0$  ssi  $x = y$ , (ii)  $d(x, y) = d(y, x)$  (symétrie) et (iii)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  (inégalité triangulaire).

Un espace métrique est un ensemble  $E$  muni d'une distance  $d$  et est noté  $(E, d)$ .

Si  $A$  et  $B$  sont des sous-ensembles de  $E$  et que  $y$  est un élément de  $E$ , on note  $d(A, y) = \inf_{x \in A} d(x, y)$  et  $d(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} d(x, y)$ . On a donc l'implication suivante, pour  $A$  et  $A'$ , deux sous-ensembles de  $E$  :

$$\text{Si } A \subseteq A' \text{ alors } d(A, y) \geq d(A', y) \quad (4)$$

Par convention, on pose  $\inf \emptyset = +\infty$ . D'où  $d(\emptyset, y) = +\infty$ .

Soit  $(E, d)$  un espace métrique,  $\lambda \in \mathbb{R}_+$  et  $A \subseteq E$ . On appelle gonflement de  $A$  à distance  $\lambda$  pour la distance  $d$  l'ensemble

$$G_\lambda^d(A) = \{y \in E \mid d(A, y) \leq \lambda\}$$

En particulier, l'adhérence d'un ensemble  $A$  dans  $(E, d)$  est  $G_0^d(A)$ . On dira que  $A$  est fermé dans  $(E, d)$  s'il est égal à son adhérence ( $G_0^d(A) = A$ ). Par ailleurs, on notera que si  $A, B$  et  $C$  sont des sous-ensembles de

$E, y \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ , on a :

$$G_\lambda^d(A \cup B) = G_\lambda^d(A) \cup G_\lambda^d(B) \quad (5)$$

$$G_\lambda^d(A \cap B) \subseteq G_\lambda^d(A) \cap G_\lambda^d(B) \quad (6)$$

$$\text{si } A \text{ et } B \text{ sont fermés alors } A \cap B \text{ est fermé} \quad (7)$$

$$d(G_0^d(C), y) = d(C, y) \quad (8)$$

$$G_\lambda^d(C) = G_\lambda^d(G_0^d(C)) \quad (9)$$

*Démonstration.* (5) se montre grâce aux équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} & y \in G_\lambda^d(A \cup B) \\ \text{ssi } & d(A \cup B, y) \leq \lambda \\ \text{ssi } & \inf\{d(x, y) \mid y \in A \cup B\} \leq \lambda \\ \text{ssi } & \inf\{d(x, y) \mid y \in A \text{ ou } y \in B\} \leq \lambda \\ \text{ssi } & \inf[\{d(x, y) \mid y \in A\} \cup \{d(x, y) \mid y \in B\}] \leq \lambda \\ \text{ssi } & \min[\inf\{d(x, y) \mid y \in A\}, \inf\{d(x, y) \mid y \in B\}] \leq \lambda \\ \text{ssi } & \min[d(A, y), d(B, y)] \leq \lambda \\ \text{ssi } & d(A, y) \leq \lambda \text{ ou } d(B, y) \leq \lambda \\ \text{ssi } & y \in G_\lambda^d(A) \cup G_\lambda^d(B) \end{aligned}$$

(6) se montre ainsi. Soit  $y \in G_\lambda^d(A \cap B)$ . On a donc  $d(A \cap B, y) \leq \lambda$ . D'où  $d(A, y) \leq \lambda$  et  $d(B, y) \leq \lambda$  d'après (4) donc  $y \in G_\lambda^d(A) \cap G_\lambda^d(B)$ .

(7) se montre ainsi. D'après (4) on a  $A \cap B \subseteq G_0^d(A \cap B)$ . Réciproquement, d'après (6) on a  $G_0^d(A \cap B) \subseteq A \cap B$ . D'où l'égalité des deux ensembles.

(8) se montre ainsi. Si  $C = \emptyset$ , le résultat est immédiat. Supposons  $C \neq \emptyset$ . De l'égalité triangulaire, on peut déduire que  $d(C, y) \leq d(C, G_0^d(C)) + d(G_0^d(C), y)$ . Or  $d(C, G_0^d(C)) = 0$ . D'où  $d(C, y) \leq d(G_0^d(C), y)$ . L'inégalité inverse est une conséquence immédiate de (4).

(9) se prouve ainsi. On a immédiatement  $G_\lambda^d(A) \subseteq G_\lambda^d(G_0^d(A))$ . Montrons la réciproque. Soit  $y \in G_\lambda^d(G_0^d(A))$ . On a donc  $d(G_0^d(A), y) \leq \lambda$ . Or,  $d(A, G_0^d(A)) = \inf\{d(A, y) \mid y \in E, d(A, y) = 0\} = 0$ . Par inégalité triangulaire et passage aux bornes inférieures, on a donc  $d(A, y) \leq d(A, G_0^d(A)) + d(G_0^d(A), y) \leq 0 + \lambda = \lambda$ . Donc,  $y \in G_\lambda^d(A)$ .  $\square$

Soit  $w_j$  ( $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ) des constantes réelles strictement positives. Un exemple de distance sur  $\mathbb{R}^n$  (où  $n \in \mathbb{N}$ ) est défini, pour  $x, y \in \mathbb{R}^n$  par :

$$d(x, y) = \sum_{j=1}^n w_j |y_j - x_j| \quad (10)$$

cette distance est appelée *distance de Manhattan*.

**La révision des croyances** est une opération de changement de croyances. Intuitivement, étant donné un ensemble de croyances  $\psi$  d'un agent à propos d'un monde statique, elle consiste à considérer les changements de ses croyances en présence d'un nouvel ensemble de croyances  $\mu$ , en supposant  $\mu$  prioritaire sur  $\psi$  pour l'agent. L'ensemble résultant des croyances de l'agent est noté  $\psi * \mu$  et dépend du choix de l'opérateur de révision  $*$ . Dans [13], le principe du changement minimal a été affirmé et peut être formulé ainsi :  $\psi$  est changé minimalement en  $\psi'$  tel que la conjonction de  $\psi'$  et  $\mu$  soit cohérent, et le résultat de la révision est cette conjonction. Il y a donc en général plusieurs opérateurs  $*$  possibles, étant donné que la définition de  $*$  dépend de la manière dont le changement de croyances est « mesuré ». Plus précisément, le principe du changement minimal a été formalisé par un ensemble de postulats, connus sous le nom de postulats AGM (d'après les

noms des auteurs de [13]). [14] présente un état de l’art détaillé de la révision à un niveau général (pour tout formalisme satisfaisant certaines propriétés, comme le fait d’être clos pour la conjonction), incluant des théorèmes de représentation et des discussions sur certaines problématiques proches (autres opérateurs de changements de croyances, etc.).

Dans [15], la révision a été étudiée dans le cadre de la logique propositionnelle  $\mathcal{L}_P$  (avec un nombre fini de variables). Les postulats AGM ont été traduits dans ce formalisme comme suit ( $\psi, \psi_1, \psi_2, \mu, \mu_1, \mu_2$  et  $\varphi$  sont des formules propositionnelles) :

- (\*1)  $\psi * \mu \models \mu$ .
- (\*2) Si  $\psi \wedge \mu$  est cohérent alors  $\psi * \mu \equiv \psi \wedge \mu$ .
- (\*3) Si  $\mu$  est cohérent alors  $\psi * \mu$  est cohérent.
- (\*4) Si  $\psi_1 \equiv \psi_2$  et  $\mu_1 \equiv \mu_2$  alors  $\psi_1 * \mu_1 \equiv \psi_2 * \mu_2$ .
- (\*5)  $(\psi * \mu) \wedge \varphi \models \psi * (\mu \wedge \varphi)$ .
- (\*6) Si  $(\psi * \mu) \wedge \varphi$  est cohérent alors  $\psi * (\mu \wedge \varphi) \models (\psi * \mu) \wedge \varphi$ .

Dans la suite,  $\mathcal{M}(\varphi)$  est l’ensemble des modèles de la formule  $\varphi$ . Il permet de définir la relation  $\models : \varphi_1 \models \varphi_2$  si  $\mathcal{M}(\varphi_1) \subseteq \mathcal{M}(\varphi_2)$ .

Toujours dans [15], une famille d’opérateurs de révision est définie, fondées sur des distances  $d$  sur  $\Omega$ , où  $\Omega$  est l’ensemble des interprétations. Pour simplifier les notations, pour deux formules  $\psi$  et  $\mu$  et une interprétation  $y$ ,  $d(\psi, y) = d(\mathcal{M}(\psi), y)$  et  $d(\psi, \mu) = d(\mathcal{M}(\psi), \mathcal{M}(\mu))$ . La révision de  $\psi$  par  $\mu$  selon  $*^d$  ( $\psi *^d \mu$ ) est telle que

$$\mathcal{M}(\psi *^d \mu) = \{y \in \mathcal{M}(\mu) \mid d(\psi, y) = d^*\} \quad (11)$$

avec  $d^* = d(\psi, \mu)$

Intuitivement,  $d^*$  est une mesure de la modification minimale de  $\psi$  en  $\psi'$  nécessaire pour rendre  $\psi' \wedge \mu$  cohérent.

Dans [15], la preuve que  $*^d$  vérifie les postulats (\*1–6) est donnée <sup>1</sup>.

Une définition équivalente de  $*^d$  peut être donnée en utilisant la notion de gonflement :

$$\mathcal{M}(\psi *^d \mu) = G_{d^*}^d(\mathcal{M}(\psi)) \cap \mathcal{M}(\mu) \quad (12)$$

Dans le cas particulier où  $\psi$  est incohérent,  $\psi *^d \mu \equiv \mu$ , puisque  $d^* = +\infty$  et  $G_{+\infty}^d = \Omega$ . Dans le cas particulier où  $\mu$  est incohérent,  $\mathcal{M}(\psi *^d \mu) = \emptyset = \mathcal{M}(\mu)$  et on a également  $d^* = +\infty$ . En résumé :

$$\begin{aligned} &\text{si l’une au moins des formules } \psi \text{ et } \mu \text{ est incohérente} \\ &\text{alors } \psi *^d \mu \equiv \mu \text{ et } d(\psi, \mu) = +\infty \end{aligned} \quad (13)$$

Cette approche peut être étendue à d’autres formalismes ayant une sémantique en théorie des modèles et telle qu’une distance sur l’ensemble  $\Omega$  des interprétations peut être définie. Cependant, pour certains formalismes, cela suppose des contraintes additionnelles :

- (a) L’opérateur  $*^d$  ainsi défini doit satisfaire les postulats (\*1–6), ce qui n’est pas le cas pour toute logique et toute distance sur  $\Omega$  ;
- (b) L’ensemble d’interprétations  $\mathcal{M}(\psi *^d \mu)$  doit être représentable dans le formalisme, i.e., il existe une formule  $\varrho$  telle que  $\mathcal{M}(\varrho)$  soit cet ensemble (contrainte de représentabilité).

On verra que ces questions se posent pour  $\mathcal{L}_{CPCL}$ .

---

1. La classe des opérateurs de révision définis dans [15] est celle qui respecte les opérateurs (\*1–6) et la classe des opérateurs  $*^d$  en est une sous-classe particulière. En fait, dans [15] est étudié le cas particulier de  $*^d$  où  $d$  est la distance de Hamming — pour montrer qu’il coïncide avec l’opérateur défini dans [16] — mais la généralisation à un opérateur  $*^d$  pour n’importe quelle  $d$  est immédiate.

### 3 La logique ( $\mathcal{L}_{\text{CPCL}}, \models$ )

#### 3.1 Syntaxe

Soit  $n$  un entier naturel non nul fixé. Soit  $\mathcal{V}$ , un ensemble de  $n$  symboles, appelées *variables* :  $\mathcal{V} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . Une *contrainte* est une expression de la forme  $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \leq b$  où  $b \in \mathbb{Q}$  et  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{Q}^n \setminus \{(0, 0, \dots, 0)\}$ . On notera parfois cette contrainte  $\sum_{j=1}^n a_jx_j \leq b$ .

L'ensemble des formules  $\mathcal{L}_{\text{CPCL}}$  est le plus petit ensemble tel que :

- Toute contrainte est une formule ;
- Si  $\varphi \in \mathcal{L}_{\text{CPCL}}$  alors  $\neg\varphi \in \mathcal{L}_{\text{CPCL}}$  ;
- Si  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{L}_{\text{CPCL}}$  alors  $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \in \mathcal{L}_{\text{CPCL}}$  et  $\varphi_1 \vee \varphi_2 \in \mathcal{L}_{\text{CPCL}}$ .

Le formalisme  $\mathcal{L}_{\text{CCL}}$  est un sous-ensemble de  $\mathcal{L}_{\text{CPCL}}$  réduit aux conjonctions de contraintes linéaires (i.e.,  $\varphi \in \mathcal{L}_{\text{CCL}}$  si  $\varphi \in \mathcal{L}_{\text{CPCL}}$  et les connecteurs  $\neg$  et  $\vee$  n'apparaissent pas dans  $\varphi$ ).

Un *littéral* est soit une contrainte (littéral positif) soit une formule de la forme  $\neg c$  où  $c$  est une contrainte (littéral négatif). Un littéral négatif  $\neg(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \leq b)$  sera aussi noté  $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n > b$ . De la même façon, on notera parfois  $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \geq b$  pour  $-a_1x_1 - a_2x_2 - \dots - a_nx_n \leq -b$  et  $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n < b$  pour  $-a_1x_1 - a_2x_2 - \dots - a_nx_n > -b$ . Par ailleurs, l'expression  $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$  est une abréviation pour  $(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \leq b) \wedge (a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \geq b)$  et  $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \neq b$  est une abréviation pour  $\neg(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b)$ . Enfin, le terme  $0x_j$  pourra être omis d'une somme apparaissant dans une formule.

#### 3.2 Sémantique

Soit  $\Omega = \mathbb{R}^n$ . Soit  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \Omega$ . À toute formule  $\varphi \in \mathcal{L}_{\text{CPCL}}$  on associe le sous-ensemble  $\mathcal{M}(\varphi)$  de  $\Omega$  de la façon suivante :

- Si  $\varphi$  est la contrainte  $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \leq b$  alors  $\mathcal{M}(\varphi)$  est l'ensemble des  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \Omega$  tels que  $a_1y_1 + a_2y_2 + \dots + a_ny_n \leq b$  ;
- Si  $\varphi = \neg\psi$  alors  $\mathcal{M}(\varphi) = \Omega \setminus \mathcal{M}(\psi)$  ;
- Si  $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$  alors  $\mathcal{M}(\varphi) = \mathcal{M}(\varphi_1) \cap \mathcal{M}(\varphi_2)$  ;
- Si  $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$  alors  $\mathcal{M}(\varphi) = \mathcal{M}(\varphi_1) \cup \mathcal{M}(\varphi_2)$ .

Étant donnés,  $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{L}_{\text{CPCL}}$ ,  $\varphi$  est dit *cohérent* si  $\mathcal{M}(\varphi) \neq \emptyset$ ,  $\varphi_1 \models \varphi_2$  si  $\mathcal{M}(\varphi_1) \subseteq \mathcal{M}(\varphi_2)$  et  $\varphi_1 \equiv \varphi_2$  si  $\mathcal{M}(\varphi_1) = \mathcal{M}(\varphi_2)$ .  $y$  est un *modèle* de  $\varphi$  si  $y \in \mathcal{M}(\varphi)$ .

**Remarque :** La syntaxe s'appuie sur  $\mathbb{Q}$  et non sur  $\mathbb{R}$  : le langage  $\mathcal{L}_{\text{CPCL}}$  doit être au plus dénombrable. En revanche, la sémantique s'appuie sur l'ensemble des réels : l'étude des contraintes linéaires se fait d'habitude sur  $\mathbb{R}^n$  (en particulier, l'optimisation linéaire qui sera utilisée en section 5).

#### 3.3 Propriétés de $\mathcal{L}_{\text{CPCL}}$

**Proposition 1** (Mise sous DNF). *Toute formule  $\varphi \in \mathcal{L}_{\text{CPCL}}$  est équivalente à une disjonction de conjonctions de littéraux (forme normale disjonctive ou DNF).*

*Démonstration.* Cette opération de mise sous DNF est la même que celle effectuée en logique propositionnelle, en utilisant les contraintes à la place des variables propositionnelles.  $\square$

**Proposition 2.** *Soit  $d$  la distance de Manhattan sur  $\mathbb{R}^n$  (cf. équation (10)). On supposera que les coefficients  $w_j$  sont rationnels :  $w_j \in \mathbb{Q}$ ,  $w_j > 0$ . Soit  $\varphi \in \mathcal{L}_{\text{CPCL}}$  et soit  $\lambda \in \mathbb{Q}_+$ .*

*L'ensemble  $G = G_\lambda^d(\mathcal{M}(\varphi))$  est représentable dans  $\mathcal{L}_{\text{CPCL}}$  : il existe  $\varphi' \in \mathcal{L}_{\text{CPCL}}$  tel que  $\mathcal{M}(\varphi') = G$ . De plus, si  $\varphi \in \mathcal{L}_{\text{CCL}}$  alors  $G$  est représentable dans  $\mathcal{L}_{\text{CCL}}$ .*

*Démonstration.*

**Cas où  $\varphi \in \mathcal{L}_{\text{CCL}}$ .** La formule  $\varphi$  s'écrit donc  $\varphi = \bigwedge_{i=1}^p \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i$ . Par définition de  $G$  et de la distance de Manhattan,  $G$  est l'ensemble des  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  tels que  $(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n)$

est solution du système d'équations :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i & \text{pour } i \in \{1, 2, \dots, p\} \\ \sum_{j=1}^n w_j |y_j - x_j| \leq \lambda \end{cases}$$

Ce système n'est pas linéaire (il contient des inégalités qui ne sont pas affines, à cause des valeurs absolues). Pour le « rendre » linéaire, on notera que la contrainte  $\sum_{j=1}^n w_j |y_j - x_j| \leq \lambda$  équivaut à la conjonction des contraintes  $\sum_{j=1}^n w_j s_j (y_j - x_j) \leq \lambda$  où  $s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in \{-1, 1\}^n$ . On remplace donc une contrainte non affine par  $2^n$  contraintes affines<sup>2</sup>. On obtient ainsi un système linéaire sur  $\mathbb{R}^{2n}$  tel que la projection sur les  $n$  dernières composantes de son ensemble de solutions correspond à  $G$ . La projection étant une application linéaire, le résultat est un ensemble qu'on peut représenter par une conjonction de contraintes affines, autrement écrit,  $G$  peut s'écrire  $G = \mathcal{M}(\varphi')$  pour un  $\varphi' \in \mathcal{L}_{\text{CCL}}$ .

**Cas où  $\varphi$  est une conjonction de littéraux.** Ce cas se traite comme le précédent, sauf que certaines contraintes de  $\varphi$  (littéraux positifs) sont à remplacer par des littéraux négatifs. Dans ce cas, on obtient donc également  $G = \mathcal{M}(\varphi')$  où  $\varphi'$  est une conjonction de littéraux.

**Cas où  $\varphi$  est sous forme DNF :**  $\varphi = \bigvee_{k=1}^q c_k$  où  $c_k$  est une conjonction de littéraux. On a donc,  $\mathcal{M}(\varphi) = \bigcup_{k=1}^q \mathcal{M}(c_k)$ . D'après (5), on a donc :  $G = \bigcup_{k=1}^q G_k$  où  $G_k = G_\lambda^d(\mathcal{M}(c_k))$ . D'après le cas précédent,  $G_k = \mathcal{M}(c'_k)$  pour  $c'_k$ , une conjonction de littéraux. Par conséquent,  $G = \mathcal{M}(\varphi')$  où  $\varphi' = \bigvee_{k=1}^q c'_k$ .

**Cas général.** Soit  $\varphi_{\text{DNF}} \in \mathcal{L}_{\text{CPCL}}$ , une formule sous DNF telle que  $\varphi \equiv \varphi_{\text{DNF}}$ . D'après le cas précédent, il existe  $\varphi' \in \mathcal{L}_{\text{CPCL}}$  tel que  $G_\lambda^d(\mathcal{M}(\varphi_{\text{DNF}})) = \mathcal{M}(\varphi')$ . Or  $\mathcal{M}(\varphi_{\text{DNF}}) = \mathcal{M}(\varphi)$ . Donc,  $G = \mathcal{M}(\varphi')$ .  $\square$

## 4 Des opérateurs de révision en $\mathcal{L}_{\text{CPCL}}$

Cette section a pour objectif d'introduire une famille d'opérateurs de révision en  $\mathcal{L}_{\text{CPCL}}$  vérifiant les postulats (\*1–6).

L'idée est de définir des opérateurs  $*^d$  où  $d$  est une distance sur  $\Omega$ . La difficulté ici est que, pour certaines distances,  $*^d$  ne vérifie pas les postulats, en particulier le postulat (\*3). Par exemple, si  $\mathcal{V} = \{x\}$  et  $d : (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto |v - u|$ , alors la révision de  $\psi = (x \leq 0)$  par  $\mu = (x > 1)$  donnera une formule dont l'ensemble des modèles est vide (il n'existe pas d'élément de l'intervalle non fermé  $]1, +\infty[$  à distance minimale de  $] - \infty, 0]$ ). Notons que ce contre-exemple s'applique à toutes les distances équivalentes à  $d$ , notamment les distances issues de normes (telles que la distance euclidienne).

On a cependant la forme affaiblie de (\*3) donnée par la proposition suivante :

**Proposition 3.** *Si  $\mu$  est cohérent et que  $\mathcal{M}(\mu)$  est fermé pour  $d$  alors  $\psi * \mu$  est cohérent.*

*Démonstration.* Soit  $A = \mathcal{M}(\psi)$  et  $B = \mathcal{M}(\mu)$ .  $B$  est par hypothèse non vide et fermé. Soit  $d^* = d(A, B) = \inf_{y \in B} d(A, y)$ . Il existe donc une suite  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $B$  qui converge dans  $(\Omega, d)$  vers  $y^*$  et tels que  $(d(A, y_n))_n$  converge vers  $d^*$ . Donc,  $d(B, y^*) = d(B, \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(B, y_n)$  (<sup>3</sup>). Or  $d(B, y_n) = 0$ . Par conséquent,  $d(B, y^*) = 0$ , donc  $B \in G_0^d(B)$ . Comme  $B$  est fermé, on a  $y^* \in B$ .

Pour résumer, on a mis en évidence  $y^* \in B$  tel que  $d(A, y^*) = d(A, B)$ . Donc,  $y^* \in \mathcal{M}(\psi *^d \mu)$  et donc,  $\psi *^d \mu$  est cohérent.  $\square$

2. Ce qui n'est, évidemment, pas très efficace en terme algorithmique. La section 5 proposera une solution moins coûteuse.

3. La dernière égalité est vérifiée car  $d$  est une application continue de  $(\Omega^2, \Delta)$  dans  $\mathbb{R}_+$  où  $\Delta : ((u, v), (x, y)) \in (\Omega^2)^2 \mapsto \max(d(u, x), d(v, y))$ .

L'idée est alors de choisir une distance pour laquelle tout sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$  est fermé. Une solution consiste à choisir une distance qui prend ses valeurs dans un ensemble discret. Par exemple, la distance  $d_1$  définie de la façon suivante convient :

$$d_1(x, y) = \lceil d(x, y) \rceil$$

où  $d$  est définie par l'équation (10). La distance  $d_1$  prend ses valeurs dans  $\mathbb{N}$ . Plus généralement, on considérera la famille des distances  $d_\varepsilon$ , où  $\varepsilon$  est un rationnel strictement positif, définies par :

$$d_\varepsilon(x, y) = \varepsilon \left\lceil \frac{d(x, y)}{\varepsilon} \right\rceil \quad (14)$$

qui prend ses valeurs dans  $\{0, \varepsilon, 2\varepsilon, \dots\} = \varepsilon\mathbb{N}$ . Le réel  $d_\varepsilon(x, y)$  est une approximation par excès de  $d(x, y)$  à  $\varepsilon$  près, en effet, d'après (3), on a

$$d(x, y) \leq d_\varepsilon(x, y) < d(x, y) + \varepsilon$$

Par conséquent, si  $A$  et  $B$  sont deux sous-ensembles de  $\mathbb{R}^n$ , on a :

$$d(A, B) \leq d_\varepsilon(A, B) \leq d(A, B) + \varepsilon \quad (15)$$

On peut montrer que  $d_\varepsilon$  est une distance sur  $\mathbb{R}^n$  (4).

**Proposition 4.** *Tout sous-ensemble  $A$  de  $\Omega$  est un fermé de  $(\Omega, d_\varepsilon)$ .*

*Démonstration.* Soit  $A \subseteq \Omega$  et  $y \in G_0^{d_\varepsilon}(A)$ . Soit  $D_\varepsilon(y) = \{d(x, y) \mid x \in A\}$ . On a donc  $d_\varepsilon(A, y) = \inf D_\varepsilon(y) = 0$ . Or  $D_\varepsilon(y) \subseteq \varepsilon\mathbb{N}$  est un ensemble discret de réels, donc sa borne inférieure lui appartient : il existe  $x \in A$  tel que  $d(x, y) = \inf D_\varepsilon(y)$ . Donc,  $x = y$  et par conséquent,  $y \in A$ .

Par conséquent, pour tout  $y \in G_0^{d_\varepsilon}(A)$ ,  $y \in A$  et donc,  $A$  est fermé.  $\square$

Cette proposition va permettre de montrer que  $*^{d_\varepsilon}$  vérifie les postulats (voir plus loin, proposition 6) mais, au préalable, la représentabilité dans  $\mathcal{L}_{CPCL}$  de l'ensemble d'interprétations donnant  $\mathcal{M}(\psi *^{d_\varepsilon} \mu)$  doit être étudiée.

**Proposition 5.** *Soit  $\psi, \mu \in \mathcal{L}_{CPCL}$ . Il existe  $\varrho \in \mathcal{L}_{CPCL}$  tel que :*

$$\mathcal{M}(\varrho) = \{y \in \mathcal{M}(\mu) \mid d_\varepsilon(\psi, y) = d_\varepsilon^*\}$$

avec  $d_\varepsilon^* = d_\varepsilon(\psi, \mu)$ . Par conséquent, la révision par  $*^{d_\varepsilon}$  est représentable dans  $\mathcal{L}_{CPCL}$  et  $\psi *^{d_\varepsilon} \mu \equiv \varrho$ .

*Démonstration.* Dans un premier temps, pour  $A$ , sous-ensemble de  $\Omega$  et  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ , montrons le résultat suivant :

$$G_\lambda^{d_\varepsilon}(A) = G_{\lambda_\varepsilon}^d(A) \quad (16)$$

$$\text{où } \lambda_\varepsilon = \varepsilon \left\lceil \frac{\lambda}{\varepsilon} \right\rceil$$

Soit  $x, y \in \Omega$ . On a les équivalences :

$$\begin{aligned} d_\varepsilon(x, y) \leq \lambda & \quad \text{ssi} \quad \varepsilon \left\lceil \frac{d(x, y)}{\varepsilon} \right\rceil \leq \lambda \\ \text{ssi} \quad \left\lceil \frac{d(x, y)}{\varepsilon} \right\rceil \leq \frac{\lambda}{\varepsilon} & \quad \text{ssi} \quad \frac{d(x, y)}{\varepsilon} \leq \left\lceil \frac{\lambda}{\varepsilon} \right\rceil \\ \text{ssi} \quad d(x, y) \leq \lambda_\varepsilon & \end{aligned} \quad (\text{d'après (2)})$$

---

4. (i) et (ii) sont faciles à montrer. (iii) s'appuie sur l'équation (1).



Par conséquent :

$$\inf_{x \in A} d_\varepsilon(x, y) \leq \lambda \text{ ssi } \inf_{x \in A} d(x, y) \leq \lambda_\varepsilon$$

Ce qui revient à :

$$d_\varepsilon(A, y) \leq \lambda \text{ ssi } d(A, y) \leq \lambda_\varepsilon$$

Ce qui entraîne (16).

Soit  $R = \{y \in \mathcal{M}(\mu) \mid d_\varepsilon(\psi, y) = d_\varepsilon^*\}$  (on veut montrer que  $R$  est représentable dans  $\mathcal{L}_{\text{CPCL}}$ ). Selon l'équivalence des définitions (11) et (12), avec  $\lambda = d_\varepsilon^* = d_\varepsilon(\psi, \mu)$  on arrive à  $R = G_\lambda^{d_\varepsilon}(\mathcal{M}(\psi)) \cap \mathcal{M}(\mu) = G_{\lambda_\varepsilon}^d(\mathcal{M}(\psi)) \cap \mathcal{M}(\mu)$  d'après (16). Soit alors  $\psi' \in \mathcal{L}_{\text{CPCL}}$  tel que  $\mathcal{M}(\psi') = G_{\lambda_\varepsilon}^d(\mathcal{M}(\psi))$  : un tel  $\psi'$  existe d'après la proposition 2. On a donc :  $R = \mathcal{M}(\psi') \cap \mathcal{M}(\mu) = \mathcal{M}(\varrho)$  où  $\varrho = \psi' \wedge \mu \in \mathcal{L}_{\text{CPCL}}$ , ce qui prouve la proposition.  $\square$

**Proposition 6.**  $*^{d_\varepsilon}$  satisfait les postulats (\*1–6).

*Démonstration.* À titre de remarque préalable, on peut noter que seuls les postulats (\*2) et (\*3) s'appuient sur la proposition 4. Pour les autres postulat, la preuve donnée dans [15] (pour la logique propositionnelle et la distance de Hamming) s'applique.

(\*1) est une conséquence de la définition de  $*^d$ .

(\*2) se prouve ainsi. Soit  $\psi$  et  $\mu$  dont la conjonction est cohérente :  $\mathcal{M}(\psi) \cap \mathcal{M}(\mu) \neq \emptyset$ . On a donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\psi *^{d_\varepsilon} \mu) &= \{y \in \mathcal{M}(\mu) \mid d_\varepsilon(\mathcal{M}(\psi), y) = 0\} \\ &= G_0^{d_\varepsilon}(\mathcal{M}(\psi)) \cap \mathcal{M}(\mu) = \mathcal{M}(\psi) \cap \mathcal{M}(\mu) \end{aligned}$$

puisque  $\mathcal{M}(\psi)$ , comme tout sous-ensemble de  $\Omega$ , est fermé pour  $d_\varepsilon$  (cf. proposition 4). On a donc  $\psi *^{d_\varepsilon} \mu \equiv \psi \wedge \mu$ .

(\*3) est une conséquence des propositions 3 et 4.

(\*4) est une conséquence immédiate de la définition de  $*^d$  et de celle d'équivalence entre formules de  $\mathcal{L}_{\text{CPCL}}$  ( $\equiv$ ).

(\*5) peut être prouvé de la façon suivante. Si  $(\psi *^{d_\varepsilon} \mu) \wedge \varphi$  n'est pas cohérent, le postulat est vérifié. Supposons que cette formule soit cohérente et soit  $y \in \mathcal{M}((\psi *^{d_\varepsilon} \mu) \wedge \varphi)$ . On a donc  $y \in \mathcal{M}(\mu)$ ,  $y \in \mathcal{M}(\varphi)$  et  $d_\varepsilon(\psi, y) = d_\varepsilon(\psi, \mu)$ . On a donc la chaîne de relations suivante :

$$d_\varepsilon(\psi, y) = d_\varepsilon(\psi, \mu) \leq d_\varepsilon(\psi, \mu \wedge \varphi) \leq d_\varepsilon(\psi, y)$$

Les réels de cette chaîne sont donc tous égaux, on a donc  $d_\varepsilon(\psi, y) = d_\varepsilon(\psi, \mu \wedge \varphi)$ , comme  $y \in \mathcal{M}(\mu \wedge \varphi)$ , on conclut que  $y \in \mathcal{M}(\psi *^{d_\varepsilon} (\mu \wedge \varphi))$ .

(\*6) peut être prouvé de la façon suivante. On suppose que  $(\psi * \mu) \wedge \varphi$  est cohérent. Soit  $y \in \mathcal{M}((\psi * \mu) \wedge \varphi)$ . On a donc (a)  $d_\varepsilon(\psi, y) = d_\varepsilon(\psi, \mu)$  et (b)  $y \in \mathcal{M}(\mu \wedge \varphi)$ . De (b) on peut déduire (c)  $d_\varepsilon(\psi, y) \geq d_\varepsilon(\psi, \mu \wedge \varphi)$ . (a) et (c) entraînent donc (d)  $d_\varepsilon(\psi, \mu) \geq d_\varepsilon(\psi, \mu \wedge \varphi)$ . Par ailleurs, on a (e)  $d_\varepsilon(\psi, \mu \wedge \varphi) \geq d_\varepsilon(\psi, \mu)$  (puisque si  $B_1 \subseteq B_2$  alors  $d_\varepsilon(A, B_1) \geq d_\varepsilon(A, B_2)$ ). De (d) et (e) on peut donc conclure :

$$d_\varepsilon(\psi, \mu) = d_\varepsilon(\psi, \mu \wedge \varphi) \tag{17}$$

La formule  $\psi *^{d_\varepsilon} (\mu \wedge \varphi)$  est cohérente d'après (\*5). Soit  $z$  un modèle de cette formule. On a donc (f)  $z \in \mathcal{M}(\mu \wedge \varphi)$  et (g)  $d_\varepsilon(\psi, z) = d_\varepsilon(\psi, \mu \wedge \varphi) = d_\varepsilon(\psi, \mu)$  d'après (17). De (f) et (g) on conclut que  $z \in \mathcal{M}((\psi *^{d_\varepsilon} \mu) \wedge \varphi)$ , ce qui achève de prouver la proposition.  $\square$

## 5 Un algorithme pour réviser dans $\mathcal{L}_{\text{CPCL}}$

Dans cette section comme dans la précédente,  $d$  dénote la distance de Manhattan sur  $\mathbb{R}^n$ . Dans un premier temps, un algorithme pour l'opérateur de révision  $*^d$  sur  $\mathcal{L}_{\text{CCL}}$  est défini (section 5.1), s'appuyant sur un travail antérieur. Puis, un algorithme pour  $*^{d_\varepsilon}$  dans  $\mathcal{L}_{\text{CPCL}}$  est présenté (section 5.2) et sa complexité est rapidement étudiée (section 5.3).

## 5.1 Un algorithme de $*^d$ dans $\mathcal{L}_{\text{CCL}}$

L'opérateur de révision  $*^d$  sur  $\mathcal{L}_{\text{CCL}}$  vérifie les postulats (\*1–6) et son calcul peut se ramener à un problème d'optimisation linéaire [10]. En effet, considérons  $\psi, \mu \in \mathcal{L}_{\text{CCL}}$ . L'ensemble  $\mathcal{M}(\psi *^d \mu)$  est l'ensemble des  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  tels que  $(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n)$  est solution du problème d'optimisation suivant dans  $\mathbb{R}^{2n}$  :

$$\begin{aligned} x &\in \mathcal{M}(\psi) \\ y &\in \mathcal{M}(\mu) \\ \text{minimiser } d(x, y) \end{aligned}$$

Ce problème n'est pas linéaire, mais peut se résoudre en cherchant les

$(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n, z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^{3n}$  qui sont solutions du problème d'optimisation linéaire suivant :

$$\left. \begin{aligned} x &\in \mathcal{M}(\psi) \\ y &\in \mathcal{M}(\mu) \\ z_j &\geq y_j - x_j \\ z_j &\geq x_j - y_j \quad \text{pour tout } j \in \{1, 2, \dots, n\} \\ \text{minimiser } \sum_{j=1}^n w_j z_j \end{aligned} \right| \quad (18)$$

L'idée est que  $z_i \geq |y_i - x_i|$  et qu'à l'optimum, cette inégalité devient une égalité.

Comme l'ensemble des solutions d'un problème d'optimisation linéaire est représentable par une conjonction de contraintes linéaires, pour trouver un  $\varrho$  tel que  $\varrho \equiv \psi *^d \mu$  il suffit de résoudre le problème d'optimisation linéaire (18), de projeter sur les composantes  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  et de trouver  $\varrho \in \mathcal{L}_{\text{CCL}}$  tel que  $\mathcal{M}(\varrho)$  est l'ensemble de ces  $y$ .

Il est important pour la suite de noter que cette optimisation permet non seulement de trouver  $\psi *^d \mu$  mais également de calculer  $d^* = d(\psi, \mu)$ , qui est la valeur à l'optimum de la fonction objectif.

## 5.2 Un algorithme de $*^{d_\varepsilon}$ dans $\mathcal{L}_{\text{CPCL}}$

Soit  $\psi, \mu \in \mathcal{L}_{\text{CPCL}}$ . Le calcul de  $\varrho = \psi *^{d_\varepsilon} \mu$  est décrit pour trois cas, chacun des deux derniers cas faisant appel au précédent.

### 5.2.1 Cas où $\psi$ et $\mu$ sont des conjonctions de littéraux

Tout d'abord, un test de cohérence est effectué. Si  $\psi$  est incohérente ou si  $\mu$  l'est,  $\psi *^{d_\varepsilon} \mu \equiv \mu$  avec  $d_\varepsilon^* = +\infty$ , d'après (13). Dans la suite de cette section, on supposera  $\psi$  et  $\mu$  cohérents.

D'après (12),  $\mathcal{M}(\psi *^{d_\varepsilon} \mu) = G_{d_\varepsilon^*}^{d_\varepsilon}(\mathcal{M}(\psi)) \cap \mathcal{M}(\mu)$ . Or, d'après (16),  $G_{d_\varepsilon^*}^{d_\varepsilon}(\mathcal{M}(\psi)) = G_{\lambda_\varepsilon}^d(\mathcal{M}(\psi))$  où  $\lambda_\varepsilon = \varepsilon \left\lceil \frac{d_\varepsilon^*}{\varepsilon} \right\rceil$ . Or,  $d_\varepsilon$  est à valeur dans  $\varepsilon\mathbb{N}$ , d'où  $\lambda_\varepsilon = \varepsilon \frac{d_\varepsilon^*}{\varepsilon} = d_\varepsilon^*$ . Par ailleurs, d'après (15) on a :

$$d^* \leq d_\varepsilon^* \leq d^* + \varepsilon \quad (19)$$

Comme  $d_\varepsilon^* \in \varepsilon\mathbb{N}$ , deux cas sont possibles :

- (a)  $d^* \in \varepsilon\mathbb{N}$ , auquel cas, l'encadrement (19) donne deux valeurs possibles pour  $d_\varepsilon^* : d^*$  et  $d^* + \varepsilon$  (5) ;
- (b)  $d^* \notin \varepsilon\mathbb{N}$ , auquel cas, l'encadrement (19) donne une seule valeur possible :  $d_\varepsilon^* = \varepsilon \left\lceil \frac{d^*}{\varepsilon} \right\rceil$ .

Par conséquent,  $\psi *^{d_\varepsilon} \mu \equiv \varrho$  avec

$$\varrho = \psi' \wedge \mu \quad \text{avec } \mathcal{M}(\psi') = G_{\lambda_\varepsilon}^d(\mathcal{M}(\psi)) \text{ et } \lambda_\varepsilon = d_\varepsilon^*$$

Pour calculer  $\varrho$ , on procède de la façon suivante :

---

5. Dans ce cas, la valeur de  $d^*$  n'est pas suffisante pour choisir entre ces deux valeurs. Par exemple, si on considère, dans un formalisme avec une seule variable,  $\psi, \mu_1$  et  $\mu_2$  les formules dont les ensembles de modèles sont respectivement  $[0; 1]$ ,  $[2; 3]$  et  $[2, 3]$ , on a  $d(\psi, \mu_1) = d(\psi, \mu_2) = 1$  alors que  $d_\varepsilon(\psi, \mu_1) = 1$  et  $d_\varepsilon(\psi, \mu_2) = 1, 2$  pour  $\varepsilon = 0, 2$ .

1. Calcul de  $d^*$  ;
  2. Si  $d^* \in \varepsilon\mathbb{N}$  alors soit  $\lambda_\varepsilon = d^*$  sinon soit  $\lambda_\varepsilon = \varepsilon \lceil \frac{d^*}{\varepsilon} \rceil$  ;
  3. On cherche  $\psi'$  tel que  $\mathcal{M}(\psi') = G_{\lambda_\varepsilon}^d(\mathcal{M}(\psi))$  ;
  4. Si  $d^* \notin \varepsilon\mathbb{N}$ , (cas (b) ci-dessus), le résultat de la révision est  $\psi' \wedge \mu$  avec  $d_\varepsilon^* = \lambda_\varepsilon$  ;
  5. Sinon (cas (a)), on a soit  $d_\varepsilon^* = d^*$ , soit  $d_\varepsilon^* = d^* + \varepsilon$ . On teste si  $\psi' \wedge \mu$  est cohérent.  
Si c'est le cas, alors cela signifie que  $d_\varepsilon^* = d^*$  et  $\psi' \wedge \mu$  sera le résultat de la révision ;
  6. Sinon on prend  $\lambda_\varepsilon = d^* + \varepsilon$  et on cherche à nouveau  $\psi'$  tel que  $\mathcal{M}(\psi') = G_{\lambda_\varepsilon}^d(\mathcal{M}(\psi))$ , le résultat de la révision étant  $\psi' \wedge \mu$ .
- Il suffit donc de savoir calculer  $d^*$  et  $\psi'$ .

**Calcul de  $d^*$ .** L'optimisation linéaire permet de calculer  $d^*$  dans le cas où  $\psi$  et  $\mu$  sont des conjonctions de contraintes. Dans le cas plus général où  $\psi$  et  $\mu$  sont des conjonctions de littéraux, on peut se ramener à ce cas de la façon suivante.

Dans un premier temps, une nouvelle notation est introduite. Pour  $\varphi$  une conjonction de littéraux, on note  $\widehat{\varphi}$ , la conjonction de contraintes obtenue en remplaçant les inégalités strictes par des inégalités larges, i.e., en remplaçant les littéraux négatifs  $\neg(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \leq b)$  par des contraintes  $-a_1x_1 - a_2x_2 - \dots - a_nx_n \leq -b$ . Par exemple, si  $\varphi = (2x_1 - 3x_2 < 5)$  alors  $\widehat{\varphi} \equiv (2x_1 - 3x_2 \leq 5)$ . Un premier résultat montre que  $\widehat{\varphi}$  est une représentation de l'adhérence de  $\mathcal{M}(\varphi)$ .

**Proposition 7.** Soit  $\varphi$  une conjonction cohérente de littéraux de  $\mathcal{L}_{CPCL}$ . On a  $\mathcal{M}(\widehat{\varphi}) = G_0^d(\mathcal{M}(\varphi))$ .

*Démonstration.*  $\varphi = \bigwedge_{i=1}^p \varphi_i$  où chaque  $\varphi_i$  est une conjonction de littéraux. On notera  $A_i = \mathcal{M}(\varphi_i)$  et  $A = \bigcap_{i=1}^p A_i$ , d'où  $\mathcal{M}(\varphi) = A$ .

**Cas  $p = 1$ .**  $\varphi$  est donc un littéral :  $\varphi = (\sum_{j=1}^p a_j x_j R b)$  où  $R = \leq$  si  $\varphi_i$  est un littéral positif et  $R = <$  sinon.

Soit  $x \in \mathcal{M}(\widehat{\varphi})$ , on a donc  $\sum_{j=1}^p a_j x_j \leq b$ . Soit  $\alpha > 0$  et soit  $u(\alpha) = (u_1(\alpha), u_2(\alpha), \dots, u_n(\alpha))$  avec  $u_j(\alpha) = x_j - s_j \alpha$  où  $s_j$  est le signe de  $a_j$  :  $s_j = 1$  si  $a_j \geq 0$  et  $s_j = 0$  sinon (et donc  $s_j a_j = |a_j|$ ). On a donc :

$$\sum_{j=1}^p a_j u_j(\alpha) = \sum_{j=1}^p a_j x_j - \alpha \sum_{j=1}^p |a_j| < b$$

puisque  $\sum_{j=1}^p |a_j| > 0$ , étant donné que  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$ . Par conséquent, pour tout  $\alpha > 0$ ,  $u(\alpha) \in A$ . Comme  $u(\alpha)$  tend vers  $x$  quand  $\alpha$  tend vers 0, on a donc  $d(A, x) = 0$  et donc  $x \in G_0^d(A)$ .

Réciproquement, soit  $x \in G_0^d(A)$  :  $d(A, x) = 0$ . Soit  $\alpha > 0$ . Il existe donc  $y \in A$  tel que  $d(y, x) \leq \alpha$ . Soit  $m = y - x$ . On a donc :  $\sum_{j=1}^p w_j |m_j| \leq \alpha$  d'où  $\sum_{j=1}^p |m_j| \leq \frac{\alpha}{w_{\min}}$  avec  $w_{\min} = \min_{j=1}^p w_j$ . On a donc :

$$\sum_{j=1}^p a_j x_j = \sum_{j=1}^p a_j (y_j - m_j) = \sum_{j=1}^p a_j y_j - \sum_{j=1}^p a_j w_j$$

Or  $|\sum_{j=1}^p a_j w_j| \leq a_{\max} \sum_{j=1}^p w_j \leq a_{\max} \frac{\alpha}{w_{\min}}$  où  $a_{\max} = \max_{j=1}^p |a_j|$ . Comme  $y \in A$ , on a donc :

$$\sum_{j=1}^p a_j x_j \leq b + f(\alpha)$$

où  $f(\alpha)$  est majoré par  $a_{\max} \frac{\alpha}{w_{\min}}$  et donc tend vers 0 quand  $\alpha$  tend vers 0. Par conséquent, en faisant ce passage à la limite, on arrive à  $\sum_{j=1}^p a_j x_j \leq b$ , i.e.,  $x \in \mathcal{M}(\widehat{\varphi})$ .

**Cas  $p \geq 2$ .** On veut montrer que  $\bigcap_{i=1}^p G_0^d(A_i) = G_0^d(A)$ . En effet, si cette égalité est réalisée, puisque  $G_0^d(A_i) = \mathcal{M}(\widehat{\varphi}_i)$  (cf. cas  $p = 1$ ) on aura  $\mathcal{M}(\widehat{\varphi}) = G_0^d(A)$ .

L'inclusion  $G_0^d(A) \subseteq \bigcap_{i=1}^p G_0^d(A_i)$  est une conséquence immédiate de (6). Montrons l'inclusion inverse. Soit  $x \in \bigcap_{i=1}^p G_0^d(A_i)$ , il suffit donc de montrer que  $x \in G_0^d(A)$ .  $\varphi$  étant cohérente,  $A \neq \emptyset$ . Soit  $y \in A$ . Pour  $\alpha \in ]0; 1]$ , soit  $u(\alpha) = (1 - \alpha)x + \alpha y$ .  $u(\alpha) = (u_1(\alpha), u_2(\alpha), \dots, u_n(\alpha)) \in \mathbb{R}^n$ . On va montrer que pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ ,  $u(\alpha) \in A_i$ .  $\varphi_i$  est un littéral, il s'écrit donc (à l'équivalence près) :  $\varphi_i \equiv (\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \ R \ b_i)$  où  $R \in \{<, \leq\}$ . Le fait que  $x \in G_0^d(A_i)$  et  $y \in A_i$  se traduit par les deux inéquations suivantes :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \qquad \sum_{j=1}^n a_{ij}y_j \ R \ b_i$$

En multipliant ces deux inéquations respectivement par  $(1 - \alpha)$  et  $\alpha$  et en faisant la somme, on obtient :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}u_j(\alpha) \ R \ b_i$$

d'où  $u(\alpha) \in A_i$ . Par conséquent,  $u(\alpha) \in A = \bigcap_{i=1}^p A_i$ . Par ailleurs,  $u(\alpha)$  tend vers  $x$  quand  $\alpha$  tend vers 0. Par conséquent,  $d(A, x) = 0$  et donc,  $x \in G_0^d(A)$ , ce qui achève la preuve.  $\square$

En s'appuyant sur ce résultat, on peut prouver le résultat suivant :

**Proposition 8.** Si  $d$  est la distance de Manhattan et que  $\psi$  et  $\mu$  sont des conjonctions de littéraux de  $\mathcal{L}_{CPCL}$  alors  $d(\psi, \mu) = d(\widehat{\psi}, \widehat{\mu})$ .

*Démonstration.* Soit  $A = \mathcal{M}(\psi)$ ,  $B = \mathcal{M}(\mu)$ ,  $\widehat{A} = \mathcal{M}(\widehat{\psi})$  et  $\widehat{B} = \mathcal{M}(\widehat{\mu})$ . On a, d'après la proposition 7,  $\widehat{A} = G_0^d(A)$  et  $\widehat{B} = G_0^d(B)$ , d'où  $A \subseteq \widehat{A}$  et  $B \subseteq \widehat{B}$ . Par conséquent,  $d(\psi, \mu) \geq d(\widehat{\psi}, \widehat{\mu})$ .

Montrons l'inégalité réciproque. Soit  $x \in A$ ,  $y \in B$ ,  $\widehat{x} \in \widehat{A}$  et  $\widehat{y} \in \widehat{B}$ . D'après l'inégalité triangulaire, on a :

$$d(x, y) \leq d(x, \widehat{x}) + d(\widehat{x}, \widehat{y}) + d(\widehat{y}, y)$$

En passant à la borne inférieure sur  $x$  et  $y$ , on obtient (en utilisant la symétrie de  $d$ ) :

$$d(A, B) \leq d(A, \widehat{x}) + d(\widehat{x}, \widehat{y}) + d(B, \widehat{y})$$

En passant à la borne inférieure sur  $\widehat{x}$  et  $\widehat{y}$ , on obtient

$$d(A, B) \leq 0 + d(\widehat{A}, \widehat{B}) + 0$$

puisque  $\widehat{x} \in \widehat{A} = G_0^d(A)$  et  $\widehat{y} \in \widehat{B} = G_0^d(B)$ . On arrive donc à  $d(\psi, \mu) \leq d(\widehat{\psi}, \widehat{\mu})$  ce qui achève de prouver la proposition.  $\square$

Le calcul de  $d^*$  se fait alors en effectuant la révision  $\widehat{\psi} *^d \widehat{\mu}$  telle que décrite à la section 5.1, qui permet d'obtenir  $d(\widehat{\psi}, \widehat{\mu})$ , égal à la valeur  $d^*$  recherchée.

**Calcul de  $\psi'$ .**  $\psi'$  est déterminé par  $\mathcal{M}(\psi') = G_{\lambda_\varepsilon}^d(\mathcal{M}(\psi))$ . Il suffit donc d'avoir un algorithme qui, étant donné un rationnel  $\lambda \geq 0$  et une conjonction de littéraux  $\varphi$  donne une formule  $\varphi_\lambda$  telle que  $\mathcal{M}(\varphi_\lambda) = G_\lambda^d(\mathcal{M}(\varphi))$ . La preuve de la proposition 2 met en évidence un tel algorithme, qui a le défaut d'être très coûteux en temps, puisqu'il consiste en l'introduction de  $2^n$  littéraux supplémentaires. La proposition suivante permet de calculer  $\varphi_\lambda$  de façon plus efficace et s'inspire de la transformation décrite dans la section 5.1.

**Proposition 9.** Soit  $\varphi$ , une conjonction de littéraux de  $\mathcal{L}_{CPCL}$  et  $\lambda \in \mathbb{Q}_+$ . Le système suivant :

$$\begin{aligned} x &\in \mathcal{M}(\varphi) \\ z_j &\geq y_j - x_j \\ z_j &\geq x_j - y_j \quad \text{pour tout } j \in \{1, 2, \dots, n\} \\ \sum_{j=1}^n w_j z_j &\leq \lambda \end{aligned}$$

peut s'exprimer comme une conjonction de littéraux de  $\mathcal{L}_{CPCL}$  avec un ensemble de  $3n$  variables  $\mathcal{V} = \{x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n, z_1, z_2, \dots, z_n\}$ . La projection de ce système sur  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  s'exprime comme une conjonction de littéraux  $\varphi_\lambda$  avec  $n$  variables et  $\mathcal{M}(\varphi_\lambda) = G_\lambda^d(\mathcal{M}(\varphi))$ .

*Démonstration.* Soit  $G_1 = G_\lambda^d(\mathcal{M}(\varphi))$  et  $G_2$  l'ensemble des  $y \in \mathbb{R}^n$  vérifiant le système donné dans la proposition, autrement écrit :

$$\begin{aligned} G_1 &= \left\{ y \in \mathbb{R}^n \left| \begin{array}{l} \text{il existe } x \in \mathbb{R}^n, \\ x \in \mathcal{M}(\varphi) \text{ et} \\ \sum_{j=1}^n w_j |y_j - x_j| \leq \lambda \end{array} \right. \right\} \\ G_2 &= \left\{ y \in \mathbb{R}^n \left| \begin{array}{l} \text{il existe } x, y \in \mathbb{R}^n, \\ x \in \mathcal{M}(\varphi), \\ z_j \geq |y_j - x_j| \text{ pour tout } j \\ \text{et } \sum_{j=1}^n w_j z_j \leq \lambda \end{array} \right. \right\} \end{aligned}$$

Il suffit de prouver que  $G_1 = G_2$ . D'après (9), il suffit de le montrer pour  $\mathcal{M}(\varphi)$  fermé. On supposera donc que c'est le cas et donc que  $G_1$  et  $G_2$  sont fermés.

Soit  $y \in G_1$ . Il existe donc  $x \in \mathbb{R}^n$  tel que  $x \in \mathcal{M}(\varphi)$  et  $\sum_{j=1}^n w_j |y_j - x_j| \leq \lambda$ . Soit  $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$  tel que  $z_j = |y_j - x_j|$  pour tout  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ . On a donc  $\sum_{j=1}^n w_j z_j \leq \lambda$  et donc  $x \in G_2$ .

Réciproquement, soit  $y \in G_2$ . Il existe donc  $x, z \in \mathbb{R}^n$  tels que  $x \in \mathcal{M}(\varphi)$ ,  $z_j \geq |y_j - x_j|$  et  $\sum_{j=1}^n w_j z_j \leq \lambda$ . Par conséquent,  $\sum_{j=1}^n w_j |y_j - x_j| \leq \lambda$  et donc,  $y \in G_1$ .  $\square$

### 5.2.2 Cas où $\psi$ et $\mu$ sont sous DNF

La proposition suivante et sa preuve sont reprises et adaptées de [12] : dans cet article, il avait été appliqué à la révision dans le formalisme de la clôture propositionnelle d'une algèbre qualitative. Le résultat se transpose à  $\mathcal{L}_{CPCL}$  en tenant compte du fait que l'ensemble des interprétations de ce formalisme est continu : toute borne inférieure n'est pas un minimum.

**Proposition 10.** Soit  $\psi$  et  $\mu$  deux formules de  $\mathcal{L}_{CPCL}$  et  $\{\psi_k\}_k$  et  $\{\mu_\ell\}_\ell$  deux familles finies de  $\mathcal{L}_{CPCL}$  telles que  $\psi = \bigvee_k \psi_k$  et  $\mu = \bigvee_\ell \mu_\ell$ . Soit  $d_{\varepsilon k\ell}^* = d_\varepsilon(\psi_k, \mu_\ell)$  pour tout  $k$  et tout  $\ell$ . On a :

$$\begin{aligned} \psi *^{d_\varepsilon} \mu &\equiv \bigvee_{k, \ell, d_{\varepsilon k\ell}^* = d_\varepsilon} \psi_k *^{d_\varepsilon} \mu_\ell \\ \text{avec } d_\varepsilon^* &= d_\varepsilon(\psi, \mu) = \min_{k\ell} d_{k\ell}^* \end{aligned} \tag{20}$$

*Démonstration.* (20) est prouvé tout d'abord :

$$\begin{aligned} d_\varepsilon^* &= d_\varepsilon(\psi, \mu) = d_\varepsilon\left(\bigcup_k \mathcal{M}(\psi_k), \bigcup_\ell \mathcal{M}(\mu_\ell)\right) \\ &= \min_{k\ell} d(\psi_k, \mu_\ell) = \min_{k\ell} d_{k\ell}^* \end{aligned}$$

Soit à présent  $y \in \mathcal{M}(\psi *^{d_\varepsilon} \mu)$ .  $d_\varepsilon(\psi, y) = d_\varepsilon^*$ , donc il existe un couple  $(k, \ell)$  tel que  $y \in \mathcal{M}(\mu_\ell)$  et  $d_\varepsilon(\psi_k, y) = d_{k\ell}^* = d_\varepsilon^*$ . Or  $d_\varepsilon(\psi_k, y) = \inf_{x \in \mathcal{M}(\psi_k)} d_\varepsilon(x, y)$  donc, pour tout  $\alpha > 0$ , il existe un  $x \in \mathcal{M}(\psi_k)$  tel que  $d_\varepsilon(x, y) \leq d_\varepsilon(\psi, y) + \alpha$  et on a donc la chaîne de relation :

$$d_\varepsilon^* = d_\varepsilon(\psi, y) \leq d_\varepsilon(x, y) \leq d_\varepsilon(\psi, y) + \alpha = d_\varepsilon^* + \alpha$$

Par conséquent, pour tout  $\alpha > 0$  il existe  $x \in \mathcal{M}(\psi_k)$  tel que  $d_\varepsilon^* \leq d_\varepsilon(x, y) \leq d_\varepsilon^* + \alpha$ . En passant à la limite quand  $\alpha$  tend vers 0, on peut en déduire que  $d_\varepsilon(\psi_k, y) \leq d_\varepsilon^*$ . Comme  $d_\varepsilon(\psi_k, y) \geq d_\varepsilon^*$  et  $d_\varepsilon^* = d_{k\ell}^*$  on en conclut que  $y \in \mathcal{M}(\psi_k *^{d_\varepsilon} \mu_\ell)$ . En résumé, si  $y \in \mathcal{M}(\psi *^{d_\varepsilon} \mu)$  alors il existe  $(k, \ell)$  tel que  $y \in \mathcal{M}(\psi_k *^{d_\varepsilon} \mu_\ell)$ . Donc  $\psi *^{d_\varepsilon} \mu \models \bigvee_{k, \ell, d_{k\ell}^* = d_\varepsilon^*} \psi_k *^{d_\varepsilon} \mu_\ell$ .

Réciproquement, soit  $y \in \mathcal{M}(\psi_k *^{d_\varepsilon} \mu_\ell)$  pour  $k$  et  $\ell$  tels que  $d_{k\ell}^* = d_\varepsilon^*$ . Cela entraîne que  $d_\varepsilon(\psi_k, y) = d_{k\ell}^*$ , d'où la chaîne de relations :

$$d_\varepsilon^* \leq d_\varepsilon(\psi, y) \leq d_\varepsilon(\psi_k, y) = d_{k\ell}^*$$

donc  $d_\varepsilon(\psi, y) = d_\varepsilon^*$  avec  $y \in \mathcal{M}(\mu)$  et, par conséquent,  $y \in \mathcal{M}(\psi *^{d_\varepsilon} \mu)$ . Donc  $\bigvee_{k, \ell, d_{k\ell}^* = d_\varepsilon^*} \psi_k *^{d_\varepsilon} \mu_\ell \models \psi *^{d_\varepsilon} \mu$ , ce qui achève de prouver la proposition.  $\square$

En appliquant cette proposition à deux formules  $\psi$  et  $\mu$  sous DNF, on peut donc calculer la révision de  $\psi$  par  $\mu$  selon  $*^{d_\varepsilon}$ , en la ramenant à la révision de conjonctions de littéraux, laquelle a été traitée dans la section précédente.

### 5.2.3 Cas général

Soit  $\psi_{\text{DNF}}$  et  $\mu_{\text{DNF}}$ , deux formules sous DNF équivalentes respectivement à  $\psi$  et à  $\mu$ . D'après le postulat (\*4) — que vérifie  $*^{d_\varepsilon}$  —  $\psi *^{d_\varepsilon} \mu \equiv \psi_{\text{DNF}} *^{d_\varepsilon} \mu_{\text{DNF}}$  : le calcul de la révision de  $\psi$  par  $\mu$  se ramène donc au cas précédent.

## 5.3 Complexité de l'algorithme

Cette section présente une analyse grossière de la complexité de l'algorithme. Celui-ci fait appel à la résolution de plusieurs problèmes :

- La mise sous forme DNF pour  $\psi$  et  $\mu$  ;
- L'optimisation linéaire pour le calcul de  $d^*$  ;
- Le test de cohérence d'une conjonction de littéraux de  $\mathcal{L}_{\text{CPCL}}$ .

Les deux derniers problèmes peuvent se traiter en temps polynomiaux. En revanche, le premier requiert un temps exponentiel dans le pire cas. Par conséquent, la complexité de l'algorithme dans le pire cas est exponentielle.

## 6 Généralisation aux contraintes mixtes

Un cadre plus général que  $\mathcal{L}_{\text{CPCL}}$  est celui dans lequel les variables peuvent être de type entier ou de type réel : on parle de contraintes linéaires mixtes. Dans cette section, nous parcourrons rapidement les sections 3 à 5 pour voir ce que ce cadre plus général change et ce qu'il apporte.

**La logique** ( $\mathcal{L}_{\text{CPCLM}}, \models$ ). La syntaxe de  $\mathcal{L}_{\text{CPCLM}}$  diffère de celle de  $\mathcal{L}_{\text{CPCL}}$  en ce que l'ensemble des variables est partagé en deux : les variables de type réel et celles de type entier. Pour indiquer cette différence, on utilise une fonction  $\tau : \mathcal{V} \rightarrow \{\mathbb{R}, \mathbb{Z}\}$  : si  $\tau(x_j) = \mathbb{R}$ ,  $x_j$  sera dit de type réel, sinon, il sera dit de type entier. Le reste de la syntaxe est inchangé.

Pour la sémantique, l'ensemble des interprétations sera  $\Omega = \tau(x_1) \times \tau(x_2) \times \dots \times \tau(x_n)$  et le reste est inchangé.

Les propositions 1 (mise sous DNF) et 2 (représentabilité de  $G_\lambda^d(\mathcal{M}(\varphi))$ ) sont toujours vérifiées. Pour cette dernière, la distance de Manhattan est la restriction à  $\Omega$  de la distance définie par (10).

Il est possible de voir dans cette logique une extension de la logique propositionnelle  $\mathcal{L}_P$  avec un nombre fini de variables  $\mathcal{V}$ . En effet, considérons la fonction qui à  $\varphi \in \mathcal{L}_P$  associe  $\underline{\varphi} \in \mathcal{L}_{\text{CPCLM}}$  obtenue en remplaçant chaque variable propositionnelle  $a \in \mathcal{V}$  par une contrainte  $\underline{a} \geq 1$  avec  $\underline{a}$ , une variable de type entier. Par exemple, si  $\varphi = \neg(a \vee b)$  alors,  $\underline{\varphi} = \neg(\underline{a} \geq 1 \vee \underline{b} \geq 1)$ , qui équivaut à  $\underline{a} \leq 0 \wedge \underline{b} \leq 0$ . On peut montrer que  $\varphi_1 \models \varphi_2$  dans  $\mathcal{L}_P$  ssi  $\underline{\varphi}_1 \models \underline{\varphi}_2$  dans  $\mathcal{L}_{\text{CPCLM}}$ .

*Démonstration.* Soit  $\mathbb{B} = \{\text{v}, \text{f}\}$  l'ensemble des booléens,  $\mathcal{V}_P = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  un ensemble de  $n$  variables propositionnelles et  $\Omega_P$ , l'ensemble des interprétations sur ces variables :  $\Omega_P = \mathbb{B}^n$ ,  $\mathbb{Z}_v = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 1\}$  et  $\mathbb{Z}_f = \mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}_v$ . Pour  $\omega \in \Omega_P$ , soit  $\underline{\omega} = \mathbb{Z}_{\omega_1} \times \mathbb{Z}_{\omega_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{\omega_n}$ . L'ensemble  $\mathcal{P} = \{\underline{\omega} \mid \omega \in \Omega_P\}$  est une partition de  $\Omega$ . Soit  $\varphi \in \mathcal{L}_P$ . On va dans un premier temps prouver qu'on a :

$$\mathcal{M}(\underline{\varphi}) = \bigcup_{\omega \in \mathcal{M}(\varphi)} \underline{\omega} \quad (21)$$

On peut prouver cela par induction :

- Supposons  $\varphi = x_j$ , alors,  $\omega \in \mathcal{M}(\varphi)$  ssi  $\omega_j = \text{v}$  (pour  $j \neq j'$ ,  $\omega_{j'}$  peut être v ou f), ce qui revient à dire que le  $j^{\text{ème}}$  terme du produit cartésien  $\underline{\omega}$  est  $\mathbb{Z}_v$ , les autres étant quelconques. Donc  $\bigcup_{\omega \in \mathcal{M}(\varphi)} \underline{\omega}$  est l'ensemble des  $y \in \Omega$  tels que  $y_j \in \mathbb{Z}_v$ . Or,  $\underline{\varphi} = (\underline{x}_j \geq 1)$  et donc,  $\mathcal{M}(\underline{\varphi})$  est également l'ensemble des  $y \in \Omega$  tels que  $y_j \in \mathbb{Z}_v$ . Par conséquent, (21) est vérifiée pour  $\varphi = x_j$ .
- Supposons que  $\varphi = \neg\chi$ , où  $\chi$  vérifie (21). On a donc :

$$\mathcal{M}(\underline{\varphi}) = \Omega \setminus \mathcal{M}(\underline{\chi}) = \Omega \setminus \bigcup_{\omega \in \mathcal{M}(\chi)} \underline{\omega} = \bigcup_{\omega \notin \mathcal{M}(\chi)} \underline{\omega}$$

la dernière égalité étant vérifiée car  $\mathcal{P}$  est une partition de  $\Omega$ . Comme  $\mathcal{M}(\varphi) = \Omega_P \setminus \mathcal{M}(\chi)$ , cela montre que  $\varphi$  vérifie (21).

- Supposons que  $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$  où  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  vérifient (21). On a donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\underline{\varphi}) &= \mathcal{M}(\underline{\varphi}_1) \cap \mathcal{M}(\underline{\varphi}_2) \\ &= \bigcup_{\omega \in \mathcal{M}(\varphi_1)} \underline{\omega} \cap \bigcup_{\omega \in \mathcal{M}(\varphi_2)} \underline{\omega} \\ &= \bigcup_{\omega \in \mathcal{M}(\varphi_1) \cap \mathcal{M}(\varphi_2)} \underline{\omega} = \bigcup_{\omega \in \mathcal{M}(\varphi)} \underline{\omega} \end{aligned}$$

- Supposons que  $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$  où  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  vérifient (21). On a donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\underline{\varphi}) &= \mathcal{M}(\underline{\varphi}_1) \cup \mathcal{M}(\underline{\varphi}_2) \\ &= \bigcup_{\omega \in \mathcal{M}(\varphi_1)} \underline{\omega} \cup \bigcup_{\omega \in \mathcal{M}(\varphi_2)} \underline{\omega} \\ &= \bigcup_{\omega \in \mathcal{M}(\varphi_1) \cup \mathcal{M}(\varphi_2)} \underline{\omega} = \bigcup_{\omega \in \mathcal{M}(\varphi)} \underline{\omega} \end{aligned}$$

En s'appuyant sur cette égalité, on a la série d'équivalences suivante :

$$\begin{aligned}
\varphi_1 \models \varphi_2 & \text{ ssi } \mathcal{M}(\varphi_1) \subseteq \mathcal{M}(\varphi_2) \\
& \text{ ssi } \bigcup_{\omega \in \mathcal{M}(\varphi_1)} \underline{\omega} \subseteq \bigcup_{\omega \in \mathcal{M}(\varphi_2)} \underline{\omega} \\
& \text{ ssi } \mathcal{M}(\underline{\varphi_1}) \subseteq \mathcal{M}(\underline{\varphi_2}) \\
& \text{ ssi } \underline{\varphi_1} \models \underline{\varphi_2}
\end{aligned} \tag{22}$$

L'équivalence (22) s'appuie sur le fait que  $\mathcal{P}$  est une partition de  $\Omega$  et que, donc, l'application  $M \in 2^\Omega \mapsto \bigcup_{\omega \in M} \underline{\omega}$  est injective.

On a donc  $\varphi_1 \models \varphi_2$  ssi  $\underline{\varphi_1} \models \underline{\varphi_2}$  ce qui achève la preuve.  $\square$

**Des opérateurs de révision en  $\mathcal{L}_{\text{CPCLM}}$ .** Soit  $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+$ ,  $\varepsilon > 0$  et soit  $d_\varepsilon$  défini par l'équation (14). L'opérateur  $*^{d_\varepsilon}$  sur  $\mathcal{L}_{\text{CPCLM}}$  partage les propriétés de  $*^{d_\varepsilon}$  sur  $\mathcal{L}_{\text{CPCL}}$  décrites en section 4, i.e., les propositions 4 (tous les sous-ensembles de  $\Omega$  sont des fermés de  $(\Omega, d_\varepsilon)$ ), 5 (représentabilité dans  $\mathcal{L}_{\text{CPCLM}}$  de  $\psi *^{d_\varepsilon} \mu$ ) et 6 ( $*^{d_\varepsilon}$  satisfait les postulats (\*1–6)).

Par ailleurs, le résultat suivant montre un lien entre une classe d'opérateurs de révision sur la logique propositionnelle  $\mathcal{L}_P$  et les opérateurs  $*^{d_\varepsilon}$  sur  $\mathcal{L}_{\text{CPCLM}}$ .

**Proposition 11.** Soit  $\mathcal{V}$  un ensemble fini de  $n$  variables propositionnelles,  $\Omega_P$ , l'ensemble des interprétations construites sur  $\mathcal{V}$  et  $d_H$  la distance de Hamming pondérée définie sur  $\Omega_P$  par :

$$d_H(x, y) = \sum_{j=1}^n \text{si } x_j = y_j \text{ alors } 0 \text{ sinon } w_j \text{ fsi}$$

Pour toutes formules  $\psi$  et  $\mu$  de  $\mathcal{L}_P$ , on a :

$$\underline{\psi *^{d_H} \mu} \wedge \beta \equiv \underline{\psi} *^{d_1} (\underline{\mu} \wedge \beta)$$

pour  $d$ , la distance de Manhattan construite sur les mêmes  $w_j$  et  $\beta \in \mathcal{L}_{\text{CPCLM}}$  tel que  $\mathcal{M}(\beta) = \{0, 1\}^n$ .

Dans cette proposition,  $\beta$  sert à se restreindre aux entiers de la paire  $\{0, 1\}$ . Cela permet en outre de calculer  $\psi *^{d_H} \mu \in \mathcal{L}_P$  en partant de  $\underline{\psi *^{d_H} \mu} \wedge \beta \in \mathcal{L}_{\text{CPCLM}}$ .

*Démonstration.* Soit  $f$  la bijection entre les interprétations de  $\mathcal{L}_P$  et celles parmi les interprétations  $y$  de  $\mathcal{L}_{\text{CPCLM}}$  tels que  $y \in \{0, 1\}^n = \mathcal{M}(\beta) : f : \omega \mapsto y$  avec  $y_j = 1$  si  $\omega \models x_j$  (où  $\mathcal{V} = \{x_1, x_2, \dots, x_j\}$ ).

Dans un premier temps, on prouve ceci :

$$\text{avec } \omega^1, \omega^2 \in \Omega_P, d_H(\omega^1, \omega^2) = d_1(\underline{\omega^1}, \underline{\omega^2}) \tag{23}$$

Soit  $x \in \omega^1$  et  $y \in \omega^2$ . Si  $\omega_j^1 \neq \omega_j^2$ , alors soit  $x_j \in \mathbb{Z}_v$  et  $y_j \in \mathbb{Z}_f$ , soit  $x_j \in \mathbb{Z}_f$  et  $y_j \in \mathbb{Z}_v$ . Dans les deux cas, on a  $|y_j - x_j| \geq 1$ . Par conséquent, on a  $d_H(\omega^1, \omega^2) \leq d_1(x, y)$ , d'où  $d_H(\omega^1, \omega^2) \leq d_1(\underline{\omega^1}, \underline{\omega^2})$ .

Réciproquement, soit  $x = f(\omega^1)$  et  $y = f(\omega^2)$ . On a  $d_H(\omega^1, \omega^2) = d_1(x, y)$  : il suffit de prendre  $x, y \in \{0, 1\}^n$  tels que Par conséquent on a l'égalité (23), de plus :

$$d_H(\omega^1, \omega^2) = d_1(f(\omega^1), f(\omega^2)) \tag{24}$$

De (23), on peut déduire  $(\psi, \mu \in \mathcal{L}_P, \omega \in \Omega_P) :$

$$d_H(\psi, \omega) = d_1(\underline{\psi}, \underline{\omega}) \tag{25}$$

$$d_H(\psi, \mu) = d_1(\underline{\psi}, \underline{\mu}) \tag{26}$$

(ces deux égalités peuvent être prouvées en s'appuyant sur (21) et (23)).



Soit  $y \in \mathcal{M}(\underline{\psi} *^{d_H} \underline{\mu} \wedge \beta)$ . On a donc  $y \in \{0, 1\}^n$ . Soit  $\omega = f^{-1}(y)$  (et donc  $y \in \underline{\omega}$ ). Comme  $y \in \mathcal{M}(\underline{\psi} *^{d_H} \underline{\mu})$ , on a  $d_H(\psi, \omega) = d_H(\psi, \mu) = d_1(\underline{\psi}, y)$ . Par conséquent  $d(\underline{\psi}, y) = d_1(\underline{\psi}, \underline{\mu})$  et donc  $y \in \mathcal{M}((\underline{\psi} *^{d_1} \underline{\mu}) \wedge \beta)$ . Comme  $*^{d_1}$  satisfait le postulat (\*5), on a donc  $y \in \mathcal{M}(\underline{\psi} *^{d_1} (\underline{\mu} \wedge \beta))$ .

Réciproquement, soit  $y \in \mathcal{M}(\underline{\psi} *^{d_1} (\underline{\mu} \wedge \beta))$ .  $y \in \mathcal{M}(\beta)$ , donc a un antécédent par  $f$  : soit  $\omega = f^{-1}(y)$ . Par ailleurs,  $\underline{\psi} *^{d_1} (\underline{\mu} \wedge \beta)$  étant cohérent, on a, d'après le postulat (\*6),  $y \in \mathcal{M}(\underline{\psi} *^{d_1} \underline{\mu})$ . Donc  $d_1(\underline{\psi}, y) = d^*$  avec  $d^* = d_1(\underline{\psi}, \underline{\mu}) = d_H(\psi, \mu)$ . Or  $d_H(\psi, \omega) = d_1(\underline{\psi}, y)$  puisque  $y = f(\omega)$  (conséquence de l'équation (24)). Donc,  $\omega \in \mathcal{M}(\psi *^{d_H} \mu)$ , d'où  $\underline{\omega} \models \underline{\psi} *^{d_H} \underline{\mu}$  et  $y \in \mathcal{M}(\underline{\omega})$ . Comme  $y \in \beta$ , on a donc  $y \in \mathcal{M}(\underline{\psi} *^{d_H} \underline{\mu} \wedge \beta)$  ce qui achève la preuve.  $\square$

**Algorithme de  $*^{d_\varepsilon}$  dans  $\mathcal{L}_{CPCLM}$ .** L'algorithme décrit dans la section 5 se transpose au cadre de  $\mathcal{L}_{CPCLM}$ , la différence principale étant l'appel à un système d'optimisation linéaire mixte : le problème sous-jacent est NP-difficile (alors qu'il est polynomial quand toutes les variables sont de type réel).

## 7 Conclusion

Cet article présente une approche pour la révision de croyances dans la clôture propositionnelle des contraintes linéaires (en nombres réels et mixte), les opérateurs de révision définis s'appuyant sur une distance à ensemble de valeurs discrètes,  $d_\varepsilon$ , approximation par excès à  $\varepsilon > 0$  de la distance de Manhattan. Le choix d'une telle distance est justifié par le fait que les distances usuellement utilisées sur  $\mathbb{R}^n$  donnent des opérateurs ne vérifiant pas tous les postulats AGM.

Une perspective de cette étude est l'implantation de ces opérateurs de révision  $*^{d_\varepsilon}$  et leur utilisation au sein d'un système de RÀPC, en profitant du fait que  $*^{d_\varepsilon}$  dans  $\mathcal{L}_{CPCLM}$  peut être vu comme une extension d'une révision à la fois en logique propositionnelle et dans le langage des conjonctions de contraintes.

L'article [17] présente un travail sur la fusion de croyances avec contraintes d'intégrité dans un formalisme englobant  $\mathcal{L}_{CPCLM}$  et utilisant une distance issue d'une norme (telle que la distance de Manhattan). Un tel opérateur  $\triangle : (\{\psi_1, \dots, \psi_p\}, \mu) \mapsto \triangle_\mu(\{\psi_1, \dots, \psi_p\})$  généralise un opérateur de révision : si  $\triangle$  satisfait les postulats de la fusion [18], alors  $*$  défini par  $\psi * \mu = \triangle_\mu(\{\psi\})$  vérifiera les postulats AGM. Exprimé en terme de révision, l'opérateur défini dans [17] vérifiera les postulats AGM sous l'hypothèse supplémentaire que  $\mathcal{M}(\mu)$  soit fermé, i.e.  $\mu \equiv \hat{\mu}$ , alors que l'approche développée dans ce rapport vérifie ces postulats, en utilisant une distance à ensemble de valeurs discrets qui approche par excès une distance de Manhattan (ce qui fait que tout sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$  est fermé). Les deux approches sont très différentes, même si elles poursuivent des buts analogues. Une dernière perspective de recherche consisterait à voir en quoi elles pourraient se combiner en une approche unique, avec un opérateur de fusion respectant les postulats de [18] et un cadre formel plus large, s'appuyant notamment sur plus de distances.

## Remerciements

L'auteur tient à remercier les deux relecteurs anonymes pour leur travail encourageant et constructif.

## Références

- [1] C. K. RIESBECK et R. C. SCHANK : *Inside Case-Based Reasoning*. Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Hillsdale, New Jersey, 1989.
- [2] J. COJAN et J. LIEBER : Applying Belief Revision to Case-Based Reasoning. In H. PRADE et G. RICHARD, éditeurs : *Computational Approaches to Analogical Reasoning : Current Trends*, volume 548 de *Studies in Computational Intelligence*, pages 133 – 161. Springer, 2014.

- [3] S. BENFERHAT, Z. BOURAOUI, O. PAPINI et É. WÜRBEL : Révision par r-ensembles de bases de connaissances en DL-LiteR. In *Reconnaissance de Formes et Intelligence Artificielle (RFIA) 2014*, France, juin 2014.
- [4] L. CHANG, U. SATTLER et T. GU : Algorithm for adapting cases represented in a tractable description logic. In *Case-Based Reasoning Research and Development, Proceedings of ICCBR-2014*, pages 63–78. Springer, 2014.
- [5] J. COJAN et J. LIEBER : An Algorithm for Adapting Cases Represented in  $\mathcal{ALC}$ . In *22th International Joint Conference on Artificial Intelligence*, Barcelone Espagne, 07 2011.
- [6] N. CREIGNOU, O. PAPINI, R. PICHLER et S. WOLTRAN : Belief revision within fragments of propositional logic. *Journal of Computer and System Sciences*, 80(2):427–449, 2014.
- [7] C. SCHWIND : From inconsistency to consistency : Knowledge base revision by tableaux opening. In *Advances in Artificial Intelligence–IBERAMIA 2010*, pages 120–132. Springer, 2010.
- [8] G. PERSONENI, A. HERMANN et J. LIEBER : Adapting Propositional Cases Based on Tableaux Repairs Using Adaptation Knowledge. In Luc LAMONTAGNE et Enric PLAZA, éditeurs : *International Conference on Case-Based Reasoning*, volume Case-Based Reasoning Research and Development de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 390–404, Cork, Ireland, septembre 2014. Springer International Publishing.
- [9] A. CORDIER, V. DUFOUR-LUSSIER, J. LIEBER, E. NAUER, F. BADRA, J. COJAN, E. GAILLARD, L. INFANTE-BLANCO, P. MOLLI, A. NAPOLI et H. SKAF-MOLLI : Taaable : a Case-Based System for personalized Cooking. In Stefania MONTANI et Lakhmi C. JAIN, éditeurs : *Successful Case-based Reasoning Applications-2*, volume 494 de *Studies in Computational Intelligence*, pages 121–162. Springer, janvier 2014.
- [10] J. COJAN et J. LIEBER : Une approche de l’adaptation en raisonnement à partir de cas fondée sur l’optimisation sous contraintes. In L. CHOLVY et S. KONIECZNY, éditeurs : *Journées d’Intelligence Artificielle Fondamentale*, Marseille France, 2009.
- [11] V. DUFOUR-LUSSIER, F. LE BER, J. LIEBER et L. MARTIN : Case Adaptation with Qualitative Algebras. In Francesca ROSSI, éditeur : *International Joint Conferences on Artificial Intelligence*, pages 3002–3006, Pékin, Chine, août 2013. AAAI Press.
- [12] V. DUFOUR-LUSSIER, A. HERMANN, F. LE BER et J. LIEBER : Révision des croyances dans la clôture propositionnelle d’une algèbre qualitative. In *JIAF-2014 – Huitièmes Journées de l’Intelligence Artificielle Fondamentale*, JIAF - Huitièmes Journées de l’Intelligence Artificielle Fondamentale, page 10, Angers, France, juin 2014.
- [13] C. E. ALCHOURRÓN, P. GÄRDENFORS et D. MAKINSON : On the Logic of Theory Change : partial meet functions for contraction and revision. *Journal of Symbolic Logic*, 50:510–530, 1985.
- [14] P. PEPPAS : Belief Revision. In F. van HARMELEN, V. LIFSCHITZ et B. PORTER, éditeurs : *Handbook of Knowledge Representation*, chapitre 8, pages 317–359. Elsevier, 2008.
- [15] H. KATSUNO et A. MENDELZON : Propositional knowledge base revision and minimal change. *Artificial Intelligence*, 52(3):263–294, 1991.
- [16] M. DALAL : Investigations into a theory of knowledge base revision : Preliminary report. In *AAAI*, pages 475–479, 1988.
- [17] J.-F. CONDOTTA, S. KACI, P. MARQUIS et N. SCHWIND : Majority Merging : from Boolean Spaces to Affine Spaces. In *Proceedings of the 19th European Conference on Artificial Intelligence (ECAI-10)*, Lisbon, pages 627–632, 2010.
- [18] S. KONIECZNY et R. Pino PÉREZ : Merging information under constraints : a logical framework. *Journal of Logic and Computation*, 12(5):773–808, 2002.